* $i=2$;

$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -1 \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

* $i=3$;

$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = -2 \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

* $j=2$;

* $i=2$;

$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = 2$ ⇓

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

* $i=3$

$l_{32} = (a_{32} - l_{31} \times l_{21}) / l_{22} = 0$ ⇓

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

* $j=3$;

* $i=3$;

$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = 1$ ⇓

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$; $\boxed{(E_1) : LY = b}$

$\begin{cases} y_1 = 1 \\ -y_1 + 2y_2 = 2 \\ 2y_1 + y_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \frac{3}{2} \\ y_3 = -1 \end{cases} ; Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{(E_2) : L^T X = Y}$ on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$L^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(E_2) \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_2 = \frac{3}{2} \\ x_3 = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{3}{4} \\ x_3 = -1 \\ x_1 = \frac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$

* Méthode QR

$A = QR$

$Q \in M_{n \times n}$ orthogonale $\left({}^tQ = Q^{-1} \right)$

$R \in M_{n \times n}$ triangulaire supérieure

$AX = b = QRX \Rightarrow {}^tQQRX = {}^tQb = b'$

$\Rightarrow (E') = RX = b'$

la méthode QR permet d'écrire A comme le produit de la matrice Q et R avec Q est une matrice orthogonale de taille n et R une matrice triang. sup. si A s'écrit Q.R, alors pour résoudre (E) il suffit de résoudre $(E') : RX = b'$ = ^tQb

Le système (E') est facile à résoudre car c'est un système à matrice triangulaire.

Exp:

$A = \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & \end{pmatrix}$

Remarque

Il est tjrs possible d'écrire A sous la forme QR (pas de cond°)

on a unicité de Q et de R si A est inversible

si $a_1 =$

si a une i

base ortho

pour déterminer Q et R il y a différents méthode:

- Méthode Householder
- Méthode d'Givens
- Méthode de Graham Smith

Rep: n=

- $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\|u_1\| = \sqrt{1 \quad}$



$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}$

$Q = t$

$Q_1 . A =$

$A = I_n - 2VV$

$= I_n - 2$

$\|U\|^2 = <$

$= 0$

Exp :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, Determiner Q et R.

Remarque :

Si $a_1 = e_1$, Q c'est l'identité.

Si a une itération donnée, le 1er vecteur de A c'est le 1er vecteur de la base canonique ($a_1 = e_1$) Alors $Q_k = I_k$

Rep : $n = 2 \Rightarrow$ une itération à faire.

- $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\alpha = -\sqrt{2} = \|a_1\|$; $U_1 = a_1 - \alpha e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\|U_1\| = \sqrt{1 + (1-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

$V_1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ \sqrt{4+2\sqrt{2}} \\ 1 \\ \sqrt{4+2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{4+2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2}+2 & 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3+2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & \frac{1}{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$Q = {}^tQ_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$Q_1 \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} & \frac{-3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$H = I_n - 2VV^T$

$= I_n - 2\frac{U.U^T}{\|U\|^2}$

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\|U\|^2 = \langle U, U \rangle = \langle x_1 - \alpha e_1, x_1 - \alpha e_1 \rangle = \langle x_1, x_1 \rangle - 2\alpha\langle e_1, x_1 \rangle + \alpha^2 \langle e_1, e_1 \rangle$

$= \alpha^2 - 2\alpha a_{11} + \alpha^2 = 2\alpha^2 - 2\alpha a_{11} = 2\alpha(\alpha - a_{11})$

Définition:

Soit $w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = 1$; $H = I_n - 2\, w\, {}^t w$ est une matrice orthogonale dite matrice d'Hôsolden associée à w. $H \in \mathcal{M}_{n\times n}$

pour construire Q et R par une méthode d'Hôsolden, on procède par itération. Pour une matrice A de taille n on a besoin $n-1$ itération. Dans l'itération $i=1$, le vecteur $u_1 = a_1 - \alpha e_1$ (a_1 : c'est le premier vecteur colonne de A ; $\alpha = \|a_1\|$)

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$: 1er vecteur de la base canonique

$V_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$ (V_1 : c'est un vecteur unitaire) . la matrice $Q_1 = I_n - 2 V_1 \cdot {}^t V_1 = I_n - \dfrac{2}{\|u_1\|^2} u_1 \cdot {}^t u_1$ (Q_1 : c'est une matrice orthogonale (de Hôsolden))

$$Q_1 \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha & x & x & \cdots & x \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & A_1 & & \end{pmatrix} \quad A_1 \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}$$

$$Q_k \cdots Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_k & & \\ & 0 & & A_k & \end{pmatrix} \quad A_k \in \mathcal{M}_{n-k,n-k}$$

$$Q_{n-1} \cdots Q_1 A = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & 0 & & \end{pmatrix} = R$$

$Q^{-1} = {}^t Q$

$\Rightarrow$ Les matrices $Q_k \in \mathcal{M}_{n\times n}$

$$Q_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_k' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad Q_k' \in \mathcal{M}_{n-k,n-k}$$

A_k c'est une matrice de taille $n-k$

$Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_{n-1}$

Remarque:

pour des raisons de stabilité numérique dans la 1ère itération uniquement α a un signe opposé au premier coefficient de vecteur a_1.

$\alpha = -\text{sign}(a_{11}) \|a_1\|$

Méthode de Gram-Schmidt

$A = Q.R$; $A = [C_1 C_2 \dots C_n]$; on pose $U_1 = C_1$; $d_1 = \frac{U_1}{\|U_1\|}$

$U_2 = C_2 - \langle C_2, d_1 \rangle d_1$; $d_2 = \frac{U_2}{\|U_2\|}$

$\vdots$

$U_k = C_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle C_k, d_j \rangle d_j$; $d_k = \frac{U_k}{\|U_k\|}$

$Q = [d_1 d_2 \dots d_n]$; $R = \begin{pmatrix} \langle C_1, d_1 \rangle & \langle C_2, d_1 \rangle & \dots & \langle C_k, d_1 \rangle & \dots \\ & \langle C_2, d_2 \rangle & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \langle C_k, d_k \rangle & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

* Décomposer A pour déterminer Q et R. Résoudre $AX = b$.

* $U_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $d_1 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ $U_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10/3 \\ -7/3 \\ -8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$

$\|U_1\| = 6$

$U_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow d_2 = \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} =$

$U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/9 \\ -14/9 \\ 28/9 \end{pmatrix}$

$U_3 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, $\|U_3\| = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{36}}{3} = \frac{6}{3} = 2$

$d_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$$R = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$AX = b \Leftrightarrow QRX = b$

$\Leftrightarrow RX = {}^tQb = b'$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; ${}^tQ = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

donc $RX = {}^tQb \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + x_3 = \frac{4}{3} \\ 9x_2 + x_3 = \frac{1}{3} \\ 2x_3 = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{18} \\ x_2 = -\frac{1}{9} \\ x_3 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

- II - Méthode de résolution itérative :

* on fait appelle aux méthodes itérative lorsque n est assez important et l'inversion de A n'est pas sûr. Le Principe est de se donné un $x^{(0)}$ comme initialisation et on cherche à construire une suite vectoriel $(x^{(k)})$ selon une formule de récurrence en partant de $x^{(0)}$ et s'assurer si la suite $x^{(k)}$ converge vers x^* alors x^* est une sol^{n} pour E.

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

(Norme)

① Dans la pratique on calcule $x^{(k)}$ jusqu'à condition d'arrêt prédefinie et on va dire que le dernier x^k calculer c'est notre x^* cherché.

Théorème :

Les 4 propriétés suivantes sont équivalents :

- i - $\lim_{k \to +\infty} B^k = O_{n\times n}$ (suite matricielle $B_k = B^k$)
- ii - $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{k \to +\infty} B^k v = \vec{0}$ (suite $v_k = B^k . v$)
- iii - $\rho(B) < 1$ (ρ : rayon)
- vi - $\exists$ $|||\cdot|||$: norme matricielle subordonnée tq $|||B||| < 1$

avec $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$; $\rho(B) = \sup\{|\lambda_i| ; \lambda_i \in Sp(B)\}$ (ρ : rayon spectrale)

$$|||B||| = \sup_{\substack{X \in \mathbb{R}^n \\ (X \neq \vec{0})}} \left\{ \frac{|||BX|||}{||X||} \right\}$$ ($||\cdot||$: norme vectoriel)

Théorème d'écart :

$$x_k \xrightarrow[C.V]{} l \iff e_k = e_k - l \xrightarrow[C.V]{} 0$$

Pour résoudre un système (E) : $AX = b$ par une méthode itérative on va chercher à construire une suite vectoriel $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ selon la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ M x^{(k+1)} = N x^{(k)} + b \end{cases} ; \quad M \in \mathcal{M}_{n\times n} ; \ N \in \mathcal{M}_{n\times n}.$$

* Pour pouvoir calculer $x^{(k+1)}$ sachant $x^{(k)}$ à partir la formule donnée il faut que :

- i - M^{-1} existe (M inversible)
- ii - $x^{(k)} \xrightarrow[C.V]{} x^*$ et $x^{(k+1)} \xrightarrow[C.V]{} x^*$ $\Big)$ $\Big(\Gamma\big(x^{(k+1)} = N x^{(k)} + b\big) \xrightarrow[k\to+\infty]{} Mx^* = Nx^* + b$

$$\Rightarrow \underbrace{(M-N)}_{A} x^* = b$$

- ii - $A = M - N$

$$x^{(k+1)} = M^{-1}(Nx^{(k)} + b) \quad ; \quad e^{(0)} = x^{(0)} - x^* \Rightarrow x^* = -e^{(0)} + x^{(0)}$$

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x^* \Rightarrow e^{(k+1)} = \underbrace{(M^{-1}N)}_{B}{}^k e^{(0)}$$

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

$$x^* = M^{-1}Nx^* + M^{-1}b$$

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x^* = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b - x^* = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b - M^{-1}Nx^* - M^{-1}b = M^{-1}N(x^{(k)} - x^*) = M^{-1}Ne^{(k)} = (M^{-1}N)^k e^{(0)}$$

- iii. $\rho(M^{-1}N) < 1$

Dans toutes la suite, chaque matrice A de taille n de système (E) sera décomposé de la façons suivante:

$$A = D - (E + F) = \begin{pmatrix} D & -F \\ -E & D \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ -a_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1}\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

on va définir M et N à partir de E, F et D:

1er méthode: (La méthode de Jacobi)

$M_J = D$; $N_J = E + F$ $\overset{\text{Jacobi}}{\Longrightarrow}$ $\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ M_J x^{(k+1)} = N_J x^{(k)} + b, \ \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$

EXERCICE: Donner la formule permettant de calculer les composantes des vecteurs $x^{(k+1)}$ sachant les composantes du vecteurs $x^{(k)}$ (Par la méthode de Jacobi).

Correction

$$M_J \cdot x^{(k+1)} = D\,x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1^{(k+1)} \\ a_{22}x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$N_J \cdot x^{(k)} + b = (E+F)x^{(k)} + b = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1 \\ \vdots \\ -a_{i1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k)} - 0\,x_i^{(k)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k)} + b_i \\ \vdots \\ -a_{n1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{nn}x_n^{(k)} + b_n \end{pmatrix}$$

Pour tout $i = [1 \cdots n]$; $a_{i1}x_1^{(k+1)} = -a_{i1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k)} - 0\cdot x_i^{(k)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k)} + b_i$

$$= b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

Exercice :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

-1- Donner D, E et F tq $A = D - (E+F)$

-2- Donner M_J et N_J (Jacobi)

-3- $\forall k \in \mathbb{N}$, Donner $x^{(k+1)}$ sous la forme d'un sys d'eq $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = ? \\ x_2^{(k+1)} = ? \\ x_3^{(k+1)} = ? \end{cases}$

-4- $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; calculer $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ par méthode de Jacobi

-5- Discuter la convergence de la méthode de Jacobi

-1- $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = D - (E+F) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

donc $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

-2- $M_J = D$ et $N_J = E+F$ donc :

$M_J = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N_J = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

-3-

$N_J x^{(k)} + b = M_J x^{(k+1)} + b$

$\begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{4}\left(1 - 5x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{7}\left(-2 + 2x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_3 = \frac{1}{2}\left(2 - 4x_1^{(k)} - 4x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

-4- $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(1+1) = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{7}(-2+2+1) = \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2}(2+4) = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$

$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{5}{7} + 1\right) \\ \frac{1}{7}\left(-2 + 1 - 1\right) \\ \frac{1}{2}\left(2 + 2 - \frac{12}{7}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{28} \\ -\frac{4}{7} \\ \frac{16}{27} \end{pmatrix}$; $x^{(3)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{95}{28} + \right. \end{pmatrix}$

-5- $M = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(M) = -4 \times 7 \times 2 \neq 0$, donc la matrice M est inversible

. $M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. $M^{-1}N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

. $\det(M^{-1}N - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{7} & -\lambda & \frac{1}{7} \\ -2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$

$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{7} \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{2}{7} \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix}$

$= -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{2}{7}\right) - \frac{2}{7}\left(-\frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{2}\right) - 2\left(-\frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{2}\right)$

$= -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{2}{7}\right) - \left(-\frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{2}\right)\frac{16}{7} = -\frac{2}{7}\lambda + \frac{5}{4}\lambda \cdot \frac{16}{7} - \frac{1}{2} \times \frac{16}{7}$

$-\lambda^3$

$= -\lambda^3 - \frac{3}{7}\lambda - \frac{1}{2}$

$\lambda = \{0,3 + 0,84i ; 0,3 - 0,84i ; -0,61\}$

$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 0,89 \Rightarrow \rho(M^{-1}N) = 0,89 < 1 \Rightarrow$ La méthode est convergente

-2- Gauss-Seidel :

$M_{GS} = D - E$; $N_{GS} = F$

EX

Donner la formule permettant de calculer $x_i^{(k+1)}$

L'idée de la méthode Gauss-Seidel est d'introduire une correction c-à-d si on cherche à calculer la $i^{ème}$ composante du nouveau vecteur $(k+1)$ on a nécessairement calculer les composante de $x_1^{(k+1)}$ jusqu'a $x_{i-1}^{(k+1)}$ donc ce plus raisonable de l'utilisé à la place de composante $x_1^{(k)}$ jusqu'a $x_{i-1}^{(k)}$.

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i = 1..n$: on va chercher $x_i^{(k+1)}$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_k^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Connect :

$$M_{JS} x^{(k+1)} = (D - E) x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & 0 \\ a_{n1} & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_i^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$N_{JS} x^{(k)} + b = F x^{(k)} + b = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & & -a_{i,i+1} \; -a_{in} \\ \vdots & & & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_i^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1^{(k+1)} = 0 x_1^{(k)} - a_{12} x_2^{(k)} - \cdots - a_{1n} x_n^{(k)} + b_1 \\ a_{21} x_1^{(k+1)} + a_{22} x_2^{(k+1)} = -a_{23} x_3^{(k)} - a_{24} x_4^{(k)} - \cdots - a_{2n} x_n^{(k)} + b_2 \\ \vdots \\ a_{i1} x_1^{(k+1)} + a_{i2} x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{ii} x_i^{(k)} = -a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{in} x_n^{(k)} + b_i \\ \vdots \\ a_{n-1,1} x_1^{(k+1)} + \cdots + a_{n-1,n-1} x_{n-1}^{(k+1)} = -a_{n-1,n} x_n^{(k)} + b_{n-1} \\ a_{n1} x_1^{(k+1)} + \cdots + a_{nn} x_n^{(k+1)} = b_n \end{cases}$$

Par identification : Pour toute $i \in [1..n]$

$$a_{i1} x_1^{(k+1)} + a_{i2} x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{ii} x_i^{(k)} = -a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{in} x_n^{(k)} + b_i$$

$$= \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + a_{ii} x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$

$\Rightarrow$ si $a_{ii} \neq 0$; $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^{(k)} \right)$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^{(k+1)} \right)$$

EX : ṁ Exp avec Gauss Seidel

Rep :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \\ +4 & +4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (D) - (E+F) = M_{GS} + N_{GS} \text{ avec } N_{GS} = F$$

$$M_{GS} = D - E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ +2 & 0 & 0 \\ +4 & +4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N_{GS} = F = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = ? \\ x_2^{(k+1)} = ? \\ x_3^{(k+1)} = ? \end{cases}$$

$* i = 1$; $x_1^{(k+1)} = \frac{1}{-4} \left[1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)} \right] = -\frac{1}{4} \left[1 - 5 x_2^{(k)} - x_3^{(k)} \right]$

$* i = 2$; $x_2^{(k+1)} = \frac{1}{7} \left[2 - a_{21} x_1^{(k+1)} - a_{23} x_3^{(k)} \right] = \frac{1}{7} \left[2 + 2 x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} \right]$

$* i = 3$; $x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2} \left[2 - a_{31} x_1^{(k+1)} - a_{32} x_2^{(k+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[2 - 4 x_1^{(k+1)} - 4 x_2^{(k+1)} \right]$

$\Rightarrow$ si $a_{ii} \neq 0$; $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^{(k)} \right)$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^{(k+1)} \right)$$

EX : ṁ Exp avec Gauss Seidel

Rep :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \\ +4 & +4 & 2 \end{pmatrix} = (D) - (E+F) = M_{GS} + N_{GS} \text{ avec } N_{GS} = F$$

$$M_{GS} = D - E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ +2 & 0 & 0 \\ +4 & +4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N_{GS} = F = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = ? \\ x_2^{(k+1)} = ? \\ x_3^{(k+1)} = ? \end{cases}$$

$* i = 1$; $x_1^{(k+1)} = \frac{1}{-4} \left[1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)} \right] = -\frac{1}{4} \left[1 - 5 x_2^{(k)} - x_3^{(k)} \right]$

$* i = 2$; $x_2^{(k+1)} = \frac{1}{7} \left[2 - a_{21} x_1^{(k+1)} - a_{23} x_3^{(k)} \right] = \frac{1}{7} \left[2 + 2 x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} \right]$

$* i = 3$; $x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2} \left[2 - a_{31} x_1^{(k+1)} - a_{32} x_2^{(k+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[2 - 4 x_1^{(k+1)} - 4 x_2^{(k+1)} \right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{4}\left(1 - 5x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{7}\left[-2 + 2x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right] \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left[2 - 4x_1^{(k+1)} - 4x_2^{(k+1)}\right] \end{cases}$$

-4- pour $X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{4}{7} \\ \frac{22}{7} \end{pmatrix} \qquad X^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{28} \\ \frac{11}{98} \\ \frac{111}{98} \end{pmatrix}$$

-5- $M_{GS} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ +1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow 14L_3 - 4L_2$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ +18 & -8 & 14 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{14} & \frac{2}{14} & 0 \\ \frac{18}{28} & -\frac{8}{28} & \frac{14}{28} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{18}{28} & -\frac{8}{28} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{18}{28} & -\frac{8}{28} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{5}{14} & \frac{1}{14} + \frac{1}{7} \\ 0 & \frac{-5 \times 18}{28} & -\frac{18}{28} - \frac{8}{28} \end{pmatrix}$$

(40)

$$M_{SOR}\, X^{(k+1)} = \begin{cases} \frac{a_{11}}{w} x_1^{(k+1)} \\ a_{21} x_1^{(k+1)} + \frac{a_{22}}{w} x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ a_{i1} x_1^{(k+1)} + \dots + a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k+1)} + \frac{a_{ii}}{w} x_i^{(k+1)} \\ \vdots \\ a_{n1} x_1^{(k+1)} + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1}^{(k+1)} + \frac{a_{nn}}{w} x_n^{(k+1)} \end{cases}$$

$$N_{SOR}\, X^{(k)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{ii} & -a_{i,i+1} \cdots -a_{in} \\ 0 & \cdots & \ddots & \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_i^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{11} x_1^{(k)} - a_{12} x_2^{(k)} - \dots - a_{1n} x_n^{(k)} \\ 0 + \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{22} x_2^{(k)} - a_{23} x_3^{(k)} - \dots - a_{2n} x_n^{(k)} \\ \vdots \\ 0 + \dots + 0 + \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{ii} x_i^{(k)} - a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} - \dots - a_{in} x_n^{(k)} \\ \vdots \\ \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{nn} x_n^{(k)} \end{cases}$$

$\Rightarrow M_{SOR}\, X^{(k+1)} = N_{SOR}\, X^{(k)} + b$; Par identification : $\forall i \in 1 \dots n$

$$a_{i1} x_1^{(k+1)} + \dots + a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k+1)} + \frac{a_{ii}}{w} x_i^{(k+1)} = \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{ii} - a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} - \dots - a_{in} x_n^{(k)} + b_i$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \frac{a_{ii}}{w} x_i^{(k+1)} = \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{ii} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$

Alors $x_i^{(k+1)} = \frac{w}{a_{ii}} \left[\left(\frac{1-w}{w}\right) a_{ii} + b_i - \sum_{j=i+1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} \right]$

$$M_{SOR}\, x^{(k+1)} = \begin{cases} \frac{a_{11}}{w} x_1^{(k+1)} \\ a_{21} x_1^{(k+1)} + \frac{a_{22}}{w} x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ a_{i1} x_1^{(k+1)} + \dots + a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k+1)} + \frac{a_{ii}}{w} x_i^{(k+1)} \\ \vdots \\ a_{n1} x_1^{(k+1)} + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1}^{(k+1)} + \frac{a_{nn}}{w} x_n^{(k+1)} \end{cases}$$

$$N_{SOR}\, x^{(k)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & & \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{ii} & -a_{i,i+1} \cdots -a_{in} \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_i^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{11} x_1^{(k)} - a_{12} x_2^{(k)} - \dots - a_{1n} x_n^{(k)} \\ 0 + \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{22} x_2^{(k)} - a_{23} x_3^{(k)} - \dots - a_{2n} x_n^{(k)} \\ \vdots \\ 0 + \dots + 0 + \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{ii} x_i^{(k)} - a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} - \dots - a_{in} x_n^{(k)} \\ \vdots \\ \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{nn} x_n^{(k)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_{SOR}\, x^{(k+1)} = N_{SOR}\, x^{(k)} + b \quad \text{Par identification : } \forall i \in 1 \dots n$$

$$a_{i1} x_1^{(k+1)} + \dots + a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k+1)} + \frac{a_{ii}}{w} x_i^{(k+1)} = \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{ii} - a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} \cdots - a_{in} x_n^{(k)} + b_i$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \frac{a_{ii}}{w} x_i^{(k+1)} = \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{ii} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$

Alors $x_i^{(k+1)} = \frac{w}{a_{ii}} \left[\left(\frac{1-w}{w}\right) a_{ii} + b_i - \sum_{j=i+1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} \right]$

$$\det(M^{-1}N - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{11} - \lambda & \frac{3}{11} \\ 0 & -\frac{45}{121} & -\frac{13}{11} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{121}\lambda(11\lambda^2 + 8\lambda + 5)$$

$$= -0{,}88 - 0{,}5\lambda^2 \quad ; \quad \lambda_3 = 0$$

$$\rho(M^{-1}N) = 0{,}59 < 1 \Rightarrow CVG$$

- Σ ; $N_{SOR} = \frac{1-w}{w} D + F$

$R = G_1 S$

(k)

$+b$

Euler $x_i^{(k+1)} = w \cdot \hat{x}^{(k+1)} + (1-w) x_i^{(k)}$

$$= \frac{w}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$+ (1-w) x_i^{(k)}$$

$$M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{5}{14} & \frac{3}{14} \\ 0 & -\frac{45}{14} & -\frac{13}{14} \end{pmatrix} ; \quad \det(M^{-1}N - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{5}{14} - \lambda & \frac{3}{14} \\ 0 & -\frac{45}{14} & -\frac{13}{14} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{14}\lambda(14\lambda^2 + 8\lambda + 5)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -0,28 + 0,52$; $\lambda_2 = -0,28 - 0,52$; $\lambda_3 = 0$

$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 0,59 \Rightarrow \rho(M^{-1}N) = 0,59 < 1 \Rightarrow$ CVG

-3- Methode de SOR:

Soit $\omega \in \mathbb{R}^+$; $M_{SOR} = \frac{1}{\omega}D - E$; $N_{SOR} = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$

SOR $\begin{cases} \cdot\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ \cdot\ \forall k \in \mathbb{N} \\ \quad M_{SOR}\, x^{(k+1)} \end{cases}$

Rq : si $\omega = 1$ SOR = GS

Exercice :

- A partir de $M_{SOR}\, x^{(k+1)} = N_{SOR}\, x^{(k)} + b$

↳ Trouver une formule permettant de calculer $x_i^{(k+1)} = \omega \cdot \hat{x}^{(k+1)} + (1-\omega)x_i^{(k)}$

$$= \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) + (1-\omega)\, x_i^{(k)}$$

avec $\hat{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$

Rep :

$$M_{SOR} = \frac{1}{\omega}D - E = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \ddots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i,i-1} & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1}\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{\omega} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & 0 \\ a_{i1} & a_{i,i-1} & \frac{a_{ii}}{\omega} & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & \frac{a_{nn}}{\omega} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_i^{(k+1)} = (1-w)\, x_i^{(k)} + \frac{w}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} \right]$$

d'où le résultat.

Ex Même Ex avec ce théorème